

DISEÑO Y VALUACION DE BONOS INDEXADOS AL PIB EL CASO URUGUAYO

JAVIER ILLANES¹

Resumen

Se diseña un bono indexado al PIB tomando en cuenta factores como la continuidad de los pagos del cupón y la volatilidad del mismo considerando que este tipo de bonos sirve como un seguro para el gobierno contra contingencias adversas. Luego utilizando la metodología de Black y Scholes en la medida real y métodos estadísticos se procede a la valuación matemática del cupón. Por último se realizan análisis de sensibilidad con respecto a las variables macro que más influyen el precio del cupón. Se obtiene como resultado que las condiciones que se imponen al bono indexado al PIB, por el cual se pagan intereses no solo por la diferencia del PIB real con respecto a un PIB base sino que también por la diferencia de la tasa de crecimiento con respecto a la tasa base, reduce la volatilidad del precio del cupón haciéndola más atractiva tanto para los inversores como también para un país que busca estabilizar sus pagos.

¹ Economista del Banco Central del Uruguay, email: jillanes@bcu.gub.uy. Quisiera agradecer los valiosos comentarios y la guía de Eduardo Siandra. También quisiera agradecer a Umberto Della Mea, Alejandro Pena y Pablo Sitjar por sus comentarios y a José Ausqui por la ayuda en el procesamiento de datos estadísticos. Las opiniones y los puntos de vista expresados en este documento son exclusivos del autor y no necesariamente representan aquellos del Departamento de Economía de la Universidad de la República ni del Banco Central del Uruguay. Todos los errores son responsabilidad del autor.

Indice

1. Introducción.....	3
2. Principales características del manejo de la deuda	4
3. Bonos indexados.....	6
3.1 Propuestas y casos previos de indexación	6
3.2 Bono indexado como un seguro contra riesgos subyacentes	7
3.3 Posibles desventajas de los bonos indexados.....	8
3.4 Elección de bono indexado al PIB para Uruguay.....	9
4. Diseño de un bono indexado al PIB para Uruguay	10
5. Valuación del bono indexado al PIB.....	14
6. Análisis de sensibilidad del modelo.....	18
7. Conclusiones.....	24
8. Referencias	25
Anexo A.....	27
Anexo B.....	30

1. Introducción

En las últimas décadas muchos países latinoamericanos han experimentado crisis financieras que se explican en parte por la insostenibilidad de la deuda soberana. México (1994), Rusia (1998), Argentina (2001) y Uruguay (2002) son algunos de los casos en que la deuda pública jugó un rol preponderante en la generación de las crisis de estos países.

Aunque se reconoce que nada sustituye a una buena política fiscal macroeconómica, el buen manejo de la deuda pública puede disminuir considerablemente el riesgo que tienen los países de enfrentar crisis financieras. Factores como tener una deuda emitida en su mayoría en moneda doméstica y el tener perfiles de deuda con horizontes a largo plazo pueden ayudar significativamente al país cuando este es afectado por shocks adversos en su economía.

Después de las crisis que Argentina y Uruguay enfrentaron en el 2001 y 2002 respectivamente, se han hecho esfuerzos dirigidos a mejorar el manejo de la deuda. En Uruguay se empezó a emitir en instrumentos en unidades indexadas a la inflación a mediano plazo y recientemente a largo plazo y la deuda emitida en dólares se trató de que tuviera horizontes de largo plazo. Argentina luego que se declarara en default y que estuviera cuatro años sin pagar intereses, reestructuró su deuda la cual se canjeó por nuevos bonos con un descuento en el valor nominal y se le adjuntó un cupón indexado al nivel de actividad. Con este cupón indexado el país pagaría un monto positivo cuando el PIB creciera por encima de un objetivo y no pagaría intereses cuando estuviera por debajo. Con esto Argentina adquiere un seguro por el cual no paga intereses en épocas adversas, y por lo tanto mejora la sostenibilidad de la deuda pública soberana en el largo plazo. Cabe señalar entonces que con el bono indexado la deuda pública argentina adquiere un carácter contingente, ubicando al inversor en una posición más cercana a la inversión en acciones.

En este trabajo se diseñará un bono indexado al PIB para el caso uruguayo que tiene diferencias de diseño con el bono argentino. El objetivo principal que tiene el bono es operar como un activo contingente ante las variaciones que puede experimentar el PIB. Se diseñó el bono de forma que pague intereses tanto por la diferencia del PIB real con respecto a un PIB base como en el caso argentino, como por la diferencia de la tasa de crecimiento del PIB real con respecto a una tasa base, lo cual es una innovación para el caso uruguayo². Con este diseño de bono para Uruguay, se obtiene que los pagos de intereses son continuos en el nivel y en la tasa de crecimiento del PIB a diferencia del caso argentino.

A los efectos de este trabajo se procederá en primer lugar a reseñar las principales razones y características de porqué el manejo de la deuda es importante para el gobierno. Posteriormente se presentarán los bonos indexados como una solución, dando primero una breve reseña histórica de las principales propuestas y luego comparando los diferentes casos de indexaciones ya sea a commodities o al PIB, exportaciones u otros tipos de indexación. En cada caso se presentarán las ventajas y las desventajas y se tratará de distinguir cual es la mejor opción según el país de que se trate. El caso de la indexación al PIB se demostrará que es una opción adecuada para el caso uruguayo.

² En el bono indexado al PIB en Argentina también se impone una condición sobre la tasa de crecimiento como veremos en el capítulo 3 pero no se pagan intereses por la diferencia de la tasa de crecimiento con respecto a una tasa base.

Luego de presentar las diferentes opciones de indexación se procederá a diseñar para el caso uruguayo el bono indexado al PIB. En este caso se estudiará el porqué del diseño que estará ligado a superar ciertas objeciones que se ponen a la hora de invertir en bonos indexados.

Después de presentar el diseño se procederá a la valuación del bono para lo cual primero se tendrá que disponer de una serie estimada del PIB base. Para ello se realiza una predicción del crecimiento económico que servirá luego para la valuación. Se utilizará el análisis de Black y Scholes en la medida real para valuar el bono y luego se calculará el valor presente del mismo suponiendo distintas tasas de descuento y distintas tasas de crecimiento y volatilidades del PIB. Si bien la valuación se ha realizado generalmente a través de simulaciones Monte Carlo, un enfoque analítico tiene la ventaja de ser más sencillo además de poder comprender los resultados más cabalmente.

Por último se presentarán las principales conclusiones de este trabajo destacando las principales virtudes de la emisión en bonos indexados. También se presentarán las principales trabas para el desarrollo de un mercado para este tipo de instrumentos.

2. Principales características del manejo de la deuda

La forma de cómo los países estructuran su deuda ha sido un determinante de las economías de los gobiernos y tiene importantes implicancias para la frecuencia de las crisis económicas. Es por eso que cada vez más se está dando importancia a las posibles innovaciones en los instrumentos de deuda que puedan mejorar su estructura.

En las economías emergentes se dan problemas para realizar emisiones de largo plazo en moneda doméstica y la estructura de la deuda de estos países se caracteriza generalmente por un gran porcentaje de emisiones de corto plazo y por la deuda de largo plazo estar emitida en moneda extranjera, lo que aumenta la probabilidad de las crisis. La deuda de corto plazo es más vulnerable a cambios abruptos en las expectativas de los agentes del mercado³, lo que puede llevar a que una peor percepción sobre la economía del país genere rápidamente mayores costos al no renovarse la inversión en estos instrumentos a las mismas tasas. De la misma manera un gran porcentaje de la deuda emitida en moneda extranjera puede llevar a que devaluaciones de la moneda doméstica tornen enseguida al país insolvente.

Un aspecto importante es que la deuda doméstica y la deuda emitida en mercados internacionales son fuentes sustitutas de financiamiento y por lo tanto deben considerarse conjuntamente. Aunque en general los países desarrollados han procurado financiamiento en el mercado doméstico en mayor medida en comparación con los países emergentes, recientemente se ha dado una convergencia⁴. Sin embargo una gran proporción de la deuda doméstica de los países emergentes se sigue emitiendo a corto plazo y en moneda extranjera.

³ Puede haber por ejemplo un cambio en las expectativas de los agentes con respecto a la evolución del tipo de cambio o el nivel de actividad.

⁴ Ver Eduardo Borensztein, Marcos Chamon, Olivier Jeanne, Paolo Mauro y Jeromin Zettelmeyer, "Sovereign Debt Structure for Crisis Prevention".

Las dificultades que tienen los países emergentes para emitir en deuda a largo plazo en su propia moneda proviene de la falta de credibilidad de la política fiscal y monetaria lo que genera mayores posibilidades de inflación y de riesgo de default⁵.

Un buen manejo de la política macroeconómica es por lejos el requisito más importante para poder obtener una deuda mejor estructurada para enfrentar shocks adversos. También la credibilidad es un requisito para poder emitir nuevos instrumentos de deuda que permitan mejorar la estructura de la deuda.⁶

Un buen manejo de la deuda podría incluir instrumentos con retornos indexados a variables reales relacionados con la performance de la economía. Con estos tipos de bonos contingentes los países se podrían cubrir contra desastres naturales⁷, contra fluctuaciones en los precios de las principales exportaciones del país.

En resumen, la estructura de la deuda por plazo y denominación en las economías de los mercados emergentes, incrementa la probabilidad de las crisis. El aumento de la deuda de corto plazo y de la deuda en moneda extranjera puede ser el resultado de una mayor vulnerabilidad de la economía pero también alimentan a la misma. Estudios empíricos señalan a la deuda de corto plazo como un indicador muy importante de la vulnerabilidad a las crisis financieras⁸. En el caso de que los agentes cambien por ejemplo sus expectativas en cuanto a la solvencia del gobierno, los agentes estarán reacios a seguir prestando al gobierno y por lo tanto no otorgarán un rollover de la deuda a corto plazo, que si esta representa un monto considerable, podrá transformarse en una crisis financiera. También, un monto considerable de deuda en moneda extranjera genera una alta vulnerabilidad a crisis financieras. Las depreciaciones de la moneda doméstica con relación a la moneda extranjera han resultado en general en un incremento en el ratio de deuda a PIB, con lo que aumenta la carga de la deuda y con ello la probabilidad de terminar en una crisis financiera.

Por lo tanto, se hace necesario para los gobiernos poder cambiar la estructura de la deuda, realizando en lo posible emisiones a más largo plazo en moneda doméstica. Esto generará una especie de seguro ante posibles depreciaciones de la moneda generadas por shocks adversos a la economía o por simples cambios en las expectativas de los agentes. También, con una mayor proporción de deuda emitida a largo plazo el gobierno se cubre contra la posible negativa de los inversores del mercado a renovar el financiamiento de corto plazo al gobierno⁹.

⁵ Eichengreen, Hausmann y Panizza realizan una descripción sobre este tema en su trabajo "Currency Mismatches, Debt Intolerance and Original Sin: Why They are not the Same and Why it Matters".

⁶ Como por ejemplo emitir nuevos instrumentos indexados a variables reales.

⁷ Bonos catástrofes en los cuales participan empresas aseguradoras.

⁸ México (1994) y Rusia (1998) son ejemplos.

⁹ En general los inversionistas de la deuda de corto plazo del gobierno están constituidos por bancos, fondos de pensión, fondos de inversión y otras instituciones financieras.

3. Bonos indexados

3.1 *Propuestas y casos previos de indexación*

Después de las crisis de los años 80's, surgieron las primeras propuestas para convertir deuda en derechos proporcionales sobre las exportaciones de los países (Bailey 1983). Luego Krugman (1988) consideró emitir deuda indexada a variables que no estuvieran bajo el control del gobierno (por ejemplo precio de los commodities) versus variables que estuvieran parcialmente bajo el control del país (exportaciones, PIB). Krugman argumentaba que indexar al precio que no estuviera bajo el control del gobierno evitaba el posible riesgo moral de variables que estuvieran bajo su control.

Luego de estas propuestas Shiller (1993) propuso crear mercados "macro" para bonos indexados al PIB. Shiller propuso crear derechos perpetuos sobre una parte del PIB de los países. Estos mercados ocuparían el lugar de los poco desarrollados mercados accionarios en los países emergentes.

Obstfeld y Peri (1998) tomaron la idea de los mercados macro sugiriendo que la Comunidad Europea podría emitir obligaciones denominadas en euros e indexadas al crecimiento nominal del PIB per cápita en vez de indexar al crecimiento real para así cubrirse contra la inflación.

Luego de las crisis de los años 90's estas propuestas se han retomado con mayor fuerza. Por ejemplo Daniel (2001) propone cubrirse contra el riesgo de precio del petróleo utilizando el mercado de futuros y de opciones. También Caballero (2002) señala que Chile le sería beneficioso emitir bonos indexados al precio del cobre.

Entre los países que han adoptado algún tipo de bono indexado se encuentra México con bonos indexados al precio del petróleo y Costa Rica, Bulgaria, Bosnia Herzegovina y Argentina, que han indexado bonos al PIB. En el caso de Bulgaria los bonos eran callable por lo que se esperaba que este país comprara el bono si se experimentaba un rápido crecimiento. En el diseño del bono para Uruguay no se incluirá la opción de que sea callable ya que esto quita a los inversores las ganancias en los momentos de bonanza por lo que desincentiva a los inversores.

Para el caso argentino del bono indexado al PIB, se describe a continuación las principales características del mismo ya que el diseño de este se tomará en parte para el bono indexado analizado en este trabajo. Este realiza pago de intereses si es que se cumplen las siguientes condiciones:

- El PIB del año t , es mayor que el PIB base de ese mismo año. En caso contrario el monto de intereses es 0.
- La tasas de crecimiento del PIB del año t es mayor que la tasa de crecimiento base del PIB. En caso contrario el monto a pagar de intereses es 0.
- La suma de los pagos de los cupones no debe ser mayor que un máximo de 48 centavos de la moneda en que está expresado el bono.

Si estas tres condiciones se cumplen, el monto de intereses que se pagará en el año $t+1$ está dado por la siguiente ecuación:

$$F_t = \frac{0.05 (P_t - PB_t) D_t u}{TCN_t}$$

donde P_t es el PIB del año t , PB_t es el PIB base del año t , D_t es el deflactor del PIB, u transforma el pago a ser hecho en un pago por cupón y TCN_t es el tipo de cambio nominal que se utiliza para transformar a los pagos desde la moneda doméstica a la moneda de pago.

Como veremos en el próximo capítulo, para el caso uruguayo se tomará la primera condición para realizar parte de los pagos de intereses. Sin embargo se pondrán otras condiciones diferentes también con respecto al caso argentino.

3.2 Bono indexado como un seguro contra riesgos subyacentes

La sostenibilidad de la deuda descansa en el crecimiento económico. Se puede observar que muchas de las crisis financieras en países latinoamericanos se debieron al pobre crecimiento económico que generó que el ratio deuda sobre PIB aumentara considerablemente.

En este trabajo se presentan los bonos indexados como un seguro contra posibles bajas en el crecimiento económico. Los bonos podrían estar indexados a un commodity en el caso de los países que dependen mucho del precio de sus exportaciones como es el caso del cobre para Chile y del crudo para México, o podrían estar indexadas directamente al PIB, las exportaciones o a la producción industrial.

Hay diversos riesgos que afectan el servicio de la deuda de los países en desarrollo. Los términos de intercambio es uno de ellos, para lo cual se ha propuesto bonos indexados al precio de un commodity. Así por ejemplo se puede construir un bono indexado al precio del cobre para por ejemplo el caso chileno en el cual en los momentos en que el precio del cobre sube por encima de un nivel básico se pagan más intereses y cuando se sitúa por debajo de ese nivel paga menos intereses o no paga directamente. Con esto se obtiene un seguro contra posibles fluctuaciones en el precio de las principales exportaciones, generando menos volatilidad en los ingresos del gobierno.

Cambios bruscos en el tipo de cambio también pueden afectar el pago del servicio de la deuda, sobretodo cuando la misma está dolarizada. También cambios en los mercados de las exportaciones que afecten el volumen de las mismas puede generar cambios en la capacidad de pago. Por lo tanto, la capacidad de pago de la deuda está sujeta a variaciones que se reflejarán en última instancia en el PIB, por lo que el nivel de actividad resume todos los shocks y por eso es que se utilizará esta variable para indexar el bono para que actúe como un seguro para la capacidad de pago de la deuda.

La principal ventaja de los bonos indexados al PIB es que estos no pagan intereses cuando el PIB se encuentra por debajo de un nivel base y por lo tanto estabilizan la relación Deuda al PIB, restringiendo su rango de variación y con ello disminuyendo la probabilidad de las crisis financieras.

También los bonos indexados al PIB reducirían la necesidad de los países emergentes de entrar en políticas fiscales procíclicas. Cuando el PIB está por debajo del límite básico el gobierno podrá tener un superávit primario menor¹⁰ con indexación que sin la misma. Cuando el PIB está por encima del límite básico, el gobierno deberá mantener un superávit primario mayor con indexación.

3.3 Posibles desventajas de los bonos indexados

Una primera desventaja que se podría señalar es que los inversores tomarían un riesgo adicional con la indexación al PIB. Sin embargo, los inversores internacionales ya están acostumbrados a invertir en acciones que son mucho más volátiles que los bonos indexados al PIB. Además implícitamente los países están expuestos al riesgo PIB, ya que si al país le va muy mal corren el riesgo que el país entre en default. Por lo que se podría decir que aumenta la volatilidad y el riesgo con la indexación pero por otro lado se reduce el riesgo de default.

Una segunda desventaja de los bonos indexados es que muchas veces son complicados de valorar. Veremos que este no es un punto menor dado que además hay distintos tipos de indexación con por lo tanto distintas valuaciones. Sin embargo, estos bonos son una forma de bonos a tasa flotante, con el cupón relacionado con el crecimiento económico en vez de la inflación o como con por ejemplo la tasa de la Fed.

Otra objeción que pueden tener los inversores se relaciona con lo que se llama riesgo moral debido a que el gobierno puede reportar valores más bajos de la variable que se indexa el bono como por ejemplo el PIB. Por otro lado el crecimiento económico es una variable clave en la reputación de un gobierno por lo que es improbable que reporten valores por debajo de los efectivos en varios años. También se podría argumentar que se podría desincentivar el crecimiento económico, sin embargo los mayores determinantes del crecimiento económico ocurren en el ámbito macroeconómico en el cual no tiene nada que ver que el gobierno indexe sus bonos al PIB.

La misma consideración con respecto a los incentivos orientados al crecimiento económico sugiere que indexar los bonos al precio de un commodity, del cual el gobierno no tiene control, puede ser preferible a indexar a una variable sobre la que el gobierno tiene algún control como es el PIB. Si es que el precio de un commodity determina los ingresos del gobierno entonces indexar a un commodity reduce la volatilidad de la deuda. Por lo tanto, indexar al precio de un commodity sería beneficioso para países como México (petróleo) y Chile (cobre) y no tanto para países como Brasil, Argentina y Uruguay.

Por otro lado, las exportaciones también son una buena medida para medir la capacidad de repago de la deuda. Sin embargo, las políticas del gobierno podrían afectar la apertura y por consiguiente las exportaciones más de lo que puede afectar el nivel de actividad, por lo que habría una mayor probabilidad de riesgo moral. Otra alternativa puede ser la producción industrial que está altamente correlacionada con el PIB para algunos países emergentes. Por lo tanto, el PIB es la medida que mejor representa el ingreso del país, sin embargo otras medidas podrían ser más precisas dependiendo del país.

¹⁰ Puede tener un superávit menor ya que tiene que pagar menos intereses. Esto le permite mantener un nivel de gasto mayor y un menor nivel de impuestos.

Otra objeción a los bonos indexados es cuando estos son callable. En estos casos supongamos un bono indexado al PIB y el crecimiento económico por encima del nivel base, el gobierno tiene el incentivo a recomprar los bonos y emitir bonos sin indexar. Por lo tanto, los inversores pierden los beneficios cuando la economía mejora considerablemente.

También si se asume asimetría de información entre el gobierno y los agentes privados en cuanto a la evolución del PIB y dado que estos bonos indexados tienen un carácter contingente --similar a las acciones--, según la teoría “Signalling Theory”, el gobierno emitiría este tipo de bonos si es que están sobrevaluados --el gobierno espera por ejemplo un menor crecimiento económico que el que espera el mercado-- o no existen otras alternativas. Por lo tanto, la emisión es una señal negativa para los inversores y el precio de este tipo de bonos indexados cae. Sin embargo, cabe señalar con respecto a esto que en Uruguay no existe una asimetría de información significativa con respecto a la evolución del PIB entre el gobierno y los agentes privados.

Otra teoría como el “Pecking Order Theory” ordena las preferencias de los emisores y predice que primero se emiten los instrumentos más seguros o sea deuda y luego acciones. Según esto también se podría argumentar que es preferible emitir un bono estándar antes que los bonos indexados al PIB, sin embargo como ya vimos estos últimos operan como un seguro ante situaciones adversas y reducen el riesgo de default, por lo que serían más seguros que los primeros. Hay otras teorías que señalan costos de agencia¹¹ o como la “Tradeoff Theory” que señala entre otros costos los de bancarrota, en los cuales se establece un objetivo de deuda con respecto a las acciones según estos costos, por lo que no sería una señal necesariamente negativa según estas teorías la emisión del bono indexado al PIB.

Por lo tanto, las posibles razones por las que la deuda indexada al PIB no ha sido adoptada todavía depende de tanto razones del lado del inversor como del que emite. Del lado del inversor se tiene además de lo ya mencionado que nuevos instrumentos tienden a ser ilíquidos y por lo tanto se tendría que asegurar cierto volumen mínimo que fuera capaz de reducir estos costos. Del lado del emisor, se tiene que los beneficios de los bonos indexados se observan en el largo plazo, y los políticos con un horizonte temporal de cinco años no están dispuestos a pagar la prima de riesgo que exigen los inversores sobre este tipo de bonos.

3.4 Elección de bono indexado al PIB para Uruguay

Ya vimos que la sostenibilidad de la deuda descansa en variables como son las exportaciones o el PIB. Generalmente shocks adversos sobre estas variables propician crisis de deuda. Para algunos países los shocks adversos toman la forma de una baja en los precios de las principales exportaciones, desastres naturales o una baja en las importaciones de los principales socios comerciales. Más arriba vimos que los bonos pueden estar indexados a variables fuera del control del gobierno como son los precios de los commodities, o pueden estar indexados a variables que en parte están bajo el control del gobierno como son las exportaciones del país o su nivel de actividad.

¹¹ Jensen y Meckling “Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure”, 1976.

El indexar a estos dos tipos de variables dependerá de las características propias de cada país, de los shocks a que está sujeto el país y de la credibilidad del gobierno. En general, la indexación al PIB provee un mejor seguro para el gobierno si es que el país no tiene problemas de credibilidad en cuanto a que no va a subestimar estadísticamente el crecimiento económico y no va a adoptar políticas asociadas a desincentivar el crecimiento del PIB.

Por las razones expuestas más arriba no es de esperar que los gobiernos adopten políticas para subestimar estadísticamente el PIB ya que este se ve como una variable fundamental en el ámbito de la opinión pública y por lo tanto tampoco serán deseables políticas que subestimen el crecimiento.

Por otro lado, el país que se trata en el presente trabajo que es Uruguay, a pesar de que sus exportaciones dependen del precio de la carne, no depende de la forma como depende Chile del cobre y México del petróleo. Si el precio de un commodity afecta directamente el resultado de las finanzas públicas y la producción del mismo lo realiza mayormente el estado, es redituable indexar al precio de este bien y de esa forma asegurarse con respecto a las fluctuaciones de los ingresos. El principal producto del Uruguay, la carne, lo producen los privados, por lo tanto cubrirse contra variaciones en el precio de la carne no sería tan efectivo como lo es una medida más amplia como cubrirse contra una variación de las exportaciones totales o contra el nivel de actividad.

Por lo tanto, indexar con respecto al nivel de actividad o con respecto a las exportaciones brindan un mayor seguro a la habilidad de repago de la deuda. Recordemos que cuando el PIB se torna más bajo que lo usual los pagos de la deuda también serán más bajos con indexación que sin indexación, lo que ayuda a mantener el ratio Deuda a PIB en niveles estables. Cuando el PIB se torna más alto que lo corriente, el ratio Deuda a PIB baja pero se paga más intereses con indexación, por lo que con este seguro se mantiene el ratio en un menor rango de valores.

En resumen, se desprende de lo anterior que para un país como Uruguay, el cual posee una cierta credibilidad por parte de los agentes económicos en cuanto a su política fiscal y monetaria, y que tiene oficinas estadísticas que también son creíbles, lo óptimo sea indexar los bonos al nivel de actividad económica.

4. Diseño de un bono indexado al PIB para Uruguay

En el diseño de un bono indexado se tiene que tomar en cuenta todos los factores mencionados anteriormente que podrían operar como limitantes para el desarrollo de un mercado para este tipo de instrumentos. Es por eso que al diseñar un bono indexado al PIB para Uruguay se tendrá que tomar en cuenta las desventajas mencionadas más arriba y por lo tanto se diseñara el bono tratando de superar estas desventajas en la medida de lo posible.

En el diseño del bono indexado al PIB para el Uruguay se tomo como modelo el caso del bono indexado al PIB para Argentina con algunas diferencias destinadas a mejorar la inserción del bono en los mercados internacionales.

En primer lugar se diseñó el bono indexado al PIB de forma que el cupón, cuyos pagos están indexados al PIB, tenga la opción de cotizar por separado del bono en sí después de un determinado período que para el caso de Argentina se determinó en

180 días. Al separar el cupón del bono se le resta a este último el factor volatilidad del cual muchos inversionistas son reacios a invertir.

En segundo lugar, el cupón indexado al PIB en niveles pagará intereses si el PIB real del año t (P_t) es superior al PIB real base de ese año (PB_t). Si el PIB real del año t es igual o menor al PIB base real, entonces el cupón no paga intereses. Matemáticamente se puede representar el flujo de caja F_t^L para el pago del cupón en niveles según la siguiente condición:

$$\text{Si } P_t > PB_t \Rightarrow F_t^L > 0 \quad \text{y si} \quad P_t \leq PB_t \Rightarrow F_t^L = 0 \quad (1)$$

La condición anterior es idéntica que para el caso argentino. Además en el caso argentino se impone que para que haya pago de intereses la tasa de crecimiento del año corriente del PIB tiene que ser mayor que la tasa de crecimiento base del PIB en el año t. Sin embargo, los intereses se pagan como la diferencia en niveles del PIB real con respecto al PIB base. La condición en la tasa de crecimiento genera entonces una discontinuidad en los pagos para los casos en que a pesar de que el nivel de PIB real estuviera por encima del PIB base real pero la tasa de crecimiento fuera menor a la tasa de crecimiento base del PIB. Es claro que esta discontinuidad en los pagos podría traer aparejado comportamientos de riesgo moral. Más específicamente si el PIB real es mucho mayor al de la base y la tasa de crecimiento real es mínimamente mayor a la base, el gobierno se ve tentado a publicar una tasa de crecimiento un poco menor al real y por debajo del base y con ello se ahorra pagos de intereses.

Es por eso que la tercera condición para Uruguay intentara salvar la discontinuidad en los pagos que se producía para el caso argentino. Por lo tanto, en tercer lugar se impondrá para el caso uruguayo que el cupón pagara adicionalmente intereses por la diferencia entre la tasa de crecimiento del nivel de actividad con respecto a la tasa de crecimiento base del nivel de actividad. Por lo que si la tasa de crecimiento del PIB es más alta que la tasa de crecimiento base entonces se pagará intereses. Matemáticamente se puede representar de la siguiente manera:

$$\text{Si } g_t > gb_t \Rightarrow F_t^g > 0 \quad \text{y si} \quad g_t \leq gb_t \Rightarrow F_t^g = 0 \quad (2)$$

A esta diferencia se le sumará una prima fija que establece un piso en los pagos. Este mínimo de pagos se incluye como un parámetro en el modelo que se determina según lo que el gobierno quiera pagar de intereses como mínimo y según el incentivo que se quiera dar a los potenciales inversionistas.

Dadas las condiciones anteriores, el monto a ser pagado en el año t+1 está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} F_t &= F_t^L + F_t^g + c = \\ &= \text{Máx} \left\{ \frac{a.(P_t - PB_t).D_t. u_t}{TCN_t}; 0 \right\} + b \text{ Máx} \{ g_t - gb_t; 0 \} + c \end{aligned} \quad (3)$$

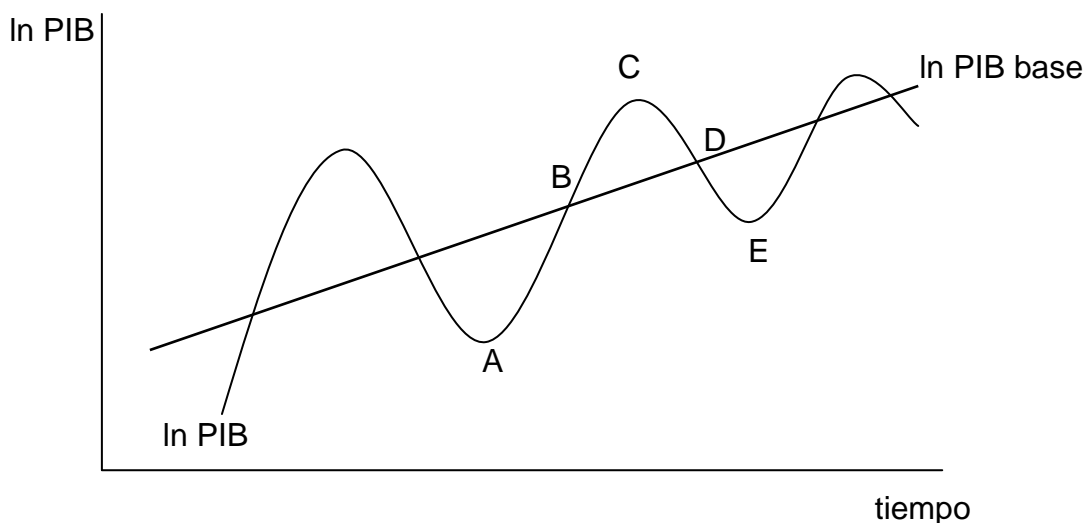
donde D_t es el índice de precios que deflacta al PIB, la variable u_t transforma el pago total a ser hecho en un pago por cupón y TCN_t es el tipo de cambio nominal que se utiliza para transformar a los pagos desde la moneda doméstica a dólares. Una depreciación de la moneda doméstica con respecto al dólar genera una reducción de los pagos en dólares. El coeficiente “a” indica en este caso el porcentaje de la diferencia entre el PIB y el PIB real base descontado por el tipo de cambio real que se destinará al pago de los tenedores del cupón. Se ha representado este coeficiente como un parámetro con el objetivo de realizar un análisis con un valor general del mismo para así cuando se implemente en la práctica se pueda fijar óptimamente según el monto de intereses que se quiera pagar.

Por otro lado en el segundo componente de la ecuación (3), “b” es el coeficiente que multiplica a la diferencia de la tasa de crecimiento del PIB con respecto al crecimiento base y al igual que “a” se fijará según los objetivos del gobierno que emite.

Por último “c” es un porcentaje fijo que paga el bono y puede representar una prima que se paga por la mayor volatilidad de un bono indexado en relación a un bono sin indexar ó también podría indicar simplemente el premio que pagan los bonos de los países emergentes.

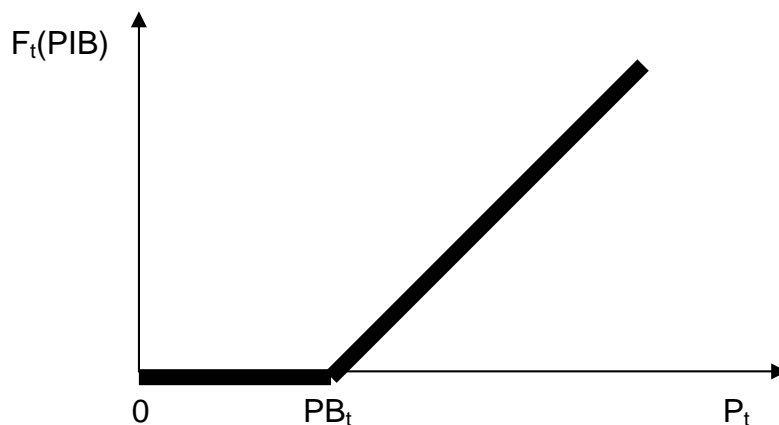
En resumen, los coeficientes “a”, “b”, “c”, son parámetros independientes del tiempo que se fijan según los objetivos que se tienen para el bono ya sea con respecto al monto de intereses que se desea pagar como con respecto a los incentivos que se desea dar a los inversionistas. Hacer estos parámetros dependientes del tiempo no afecta el análisis.

Un punto importante es que se paga intereses tanto si el PIB está por encima del básico como también si la tasa de crecimiento es mayor a una tasa objetivo. En suma, el bono no paga intereses si la economía está decreciendo y el nivel de ingreso es inferior al normal. En el siguiente gráfico del PIB se representa el área donde el cupón realiza pagos según el PIB se encuentre por encima del PIB base o que la tasa de crecimiento esté por encima de la tasa base.



Si suponemos que la tasa de crecimiento base es 0^{12} , tenemos que desde el punto A al B el cupón está pagando solo por la diferencia de la tasa de crecimiento que está creciendo ya que el PIB se encuentra por debajo del base. Desde el punto B al C, el cupón paga por la diferencia en niveles del PIB y por la tasa de crecimiento. Si el PIB se encuentra en el tramo de C a D, el PIB paga solo por la diferencia en niveles ya que la tasa de crecimiento está disminuyendo. Por último, en el tramo D a E el cupón no paga intereses. Como se puede observar en un gran porcentaje del tiempo el cupón está pagando intereses.

También se diseña el bono indexado al PIB de forma que los pagos sean continuos en tanto el nivel del PIB como en la tasa de crecimiento del PIB. Vamos a descomponer los pagos de F_t (flujo de fondos) en el primer componente que depende del nivel del PIB y el segundo componente que depende de la tasa de crecimiento del PIB. Como se puede observar en la siguiente gráfica el primer componente tiene pagos continuos.



Donde en el eje de las abcisas se grafica el nivel del PIB. O sea que para todo monto mayor del PIB mayor al base, el cupón pagará intereses.

Tomando el segundo componente también se lo puede graficar y ver que los flujos de pago son continuos en la tasa de crecimiento del PIB. La gráfica es similar que la anterior pero en la tasa de crecimiento.

Aplicando la propiedad que dos sumas de funciones continuas da como resultado una función continua se obtiene que el flujo de pagos del bono indexado al PIB para el diseño estudiado es continuo en sus fundamentos.

Esta propiedad trae aparejado importantes resultados como por ejemplo que no se generen situaciones de riesgo moral debido a la posible manipulación de las estadísticas debido a que los pagos de intereses no son continuos en tanto en el nivel del PIB como en la tasa de crecimiento cuando se le imponen condiciones como en el caso argentino.

Con respecto de que los bonos indexados generen una mayor volatilidad para los inversores, se puede argumentar que los inversores ya están acostumbrados a invertir en instrumentos mucho más volátiles como son las acciones. Además ya hay

¹² Se toma una tasa base igual a 0 solo a los efectos de este caso para simplificar y hacer más fácil el análisis gráfico ya que estrictamente el PIB base tiene una tendencia y por lo tanto la tasa de crecimiento es mayor que 0.

instrumentos que están indexados a una variable como son los bonos indexados a la inflación cuyo intercambio en el mercado internacional es considerable. Por lo tanto, no se cree que la mayor volatilidad sea un obstáculo para que los inversores puedan invertir en estos instrumentos. Incluso, como se ha mencionado más arriba, se ha diseñado el bono de forma de si se quiere pagar una prima por esta volatilidad esta se incluye en el coeficiente “c”.

Cabe señalar que aunque puede aumentar la prima de riesgo por el aumento de la volatilidad del bono, por otro lado se tiene que al operar este bono indexado como una cobertura contra posibles contingencias negativas para la economía, se tiene que se reduce el riesgo y con ello el pago de la prima.

Es importante entonces recalcar por último que con el diseño de este instrumento se buscó que este operara como un seguro o una cobertura contra shocks adversos a la economía, buscando al mismo tiempo hacerlo un instrumento atractivo para los inversionistas.

5. Valuación del bono indexado al PIB

Usualmente para el caso de la valuación de los bonos indexados a una variable real se han utilizado simulaciones Monte Carlo, cuyos resultados si bien han sido efectivos para la valuación, no presentan las ventajas de una valuación analítica. Esta última permite explicitar y replicar el proceso de cálculo del valor presente neto del cupón.

Para la valuación del cupón indexado al PIB se procederá con los siguientes pasos. Primero se modelizará el proceso estocástico para el PIB a través de un movimiento Browniano. En un segundo paso se procederá a calcular el valor presente neto del flujo de fondos del cupón dado el proceso estocástico para el PIB, utilizando el método de valuación de Black y Scholes en la medida real. Medida real significa que el PIB y su crecimiento son índices en vez de instrumentos financieros y no se puede replicar por combinaciones de otros instrumentos. Cuando se puede replicar ahí si se trabaja con las medidas neutrales al riesgo.

Para el cálculo del flujo de fondos se impondrá las condiciones contingentes descritas en el apartado anterior, siendo eso lo que genera que el cupón sea un seguro o “hedge” para la economía.

Luego tomando en cuenta la distribución del proceso estocástico se realiza el cálculo del valor presente neto de los flujos de fondos para calcular el valor del cupón y del bono mismo. En este paso entra a jugar la tasa de descuento que no es un punto menor. La tasa de descuento tendría que tomar en cuenta y pagar un premio por el riesgo de default del país. Sin embargo en este primer argumento se puede sostener que el flujo de caja del cupón no está correlacionado con el riesgo de default. El cupón paga más intereses cuanto mejor sea el desempeño de la economía y no paga cuando baja por debajo de un determinado límite. Es por eso que la volatilidad del producto del país no solo no aumenta el riesgo de default sino que mejora su valor debido a que hay mayor probabilidad de alcanzar valores altos del producto. También se supondrá de que los flujos de caja del cupón tienen correlación cero con los retornos de un portafolio global¹³. Dado estos supuestos, se puede suponer entonces que la tasa de

¹³ Estaríamos hablando de por ejemplo el portafolio de los Fondos de Pensiones Calpers en Estados Unidos que poco tienen que ver con el crecimiento del producto uruguayo.

descuento que se manejará está muy cerca de la tasa libre de riesgo y que será menor que la tasa de descuento manejada para un bono estándar de un país.

El proceso estocástico del PIB

En esta sección se seguirá en parte la modelización realizada por Pernice y Lopez Fagundez en un trabajo sobre los bonos indexados al PIB para el caso argentino¹⁴. Se supone entonces en primer lugar que el PIB está modelizado por el siguiente proceso Browniano Geométrico:

$$dP_t = \mu \cdot P_t dt + \sigma \cdot P_t dW_t \quad (4)$$

donde μ es la tasa media de crecimiento real, σ es la desviación estándar del crecimiento real y $dW_t \rightarrow N(0, dt)$ representa el movimiento Browniano o término estocástico.

Estamos suponiendo en que la media de la tasa de crecimiento y la volatilidad se mantienen constantes a lo largo de toda la vida del cupón. También se podría haber hecho depender estas variables del tiempo, aunque la valuación es básicamente la misma.

Para estimar la tasa media del crecimiento del PIB base real se realizaron predicciones econométricas. En el Anexo A se describen la metodología y se presentan las tablas y gráficas de la estimación econométrica¹⁵.

Aplicando el lema de Ito se obtiene la siguiente ecuación:

$$d \ln P_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \rightarrow N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 dt \right) \quad (5)$$

en donde la tasa de crecimiento compuesta continua del PIB que se mide por $d \ln P_t$ depende de la diferencia de la media con respecto a la volatilidad del proceso y depende también de un término estocástico.

¹⁴ Sergio Pernice, Federico López Fagundez "Valuation of Debt Indexed to Real Values I The case of the Argentinean Growth Coupon: a Simple Model", Centro de Estudios en Ingeniería Financiera, Universidad del CEMA.

¹⁵ Para estimar la tasa de crecimiento real base del PIB se probó primero que el logaritmo del PIB trimestral era una variable no estacionaria y por lo tanto se procedió a tomar las cuartas diferencias para eliminar la raíz estacional dado que las gráficas de la serie mostraban claramente dicho componente. Luego, se ajustó un modelo ARIMA(1,0,0) para la tasa de crecimiento que ajustó eficientemente.

Si suponemos que $\theta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ entonces la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$d \ln P_t = \theta dt + \sigma dW_t \quad (6)$$

El siguiente paso es obtener la distribución de probabilidad que el modelo implica para el logaritmo del PIB para cada año. Dicha probabilidad depende de la condición inicial de que en $t=0$ el producto es P_0 . La distribución de probabilidad en base al proceso estocástico (6) y la condición inicial es conocida como la solución fundamental del proceso estocástico.

Definamos la variable $x_t = \ln(P_t / P_0)$, entonces tenemos que la densidad normal con media $\theta.t$ y varianza $\sigma^2.t$ tiene la siguiente forma:

$$f(\ln(P_t / P_0) = x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x_t - \theta.t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \quad (7)$$

Esta ecuación del modelo nos servirá para modelizar el pago que presenta el cupón por la diferencia en niveles. Para el pago por la diferencia en las tasas de crecimiento usamos una distribución de probabilidad similar a la anterior aunque con alguna diferencia ya que las tasas de crecimiento se miden en el horizonte temporal de un solo período.

Para la tasa de crecimiento del PIB, si definimos $z_t = 1 + g_t$, se tiene que la distribución de probabilidad corresponde a una log-normal¹⁶ cuya densidad es la siguiente:

$$f(1 + g_t = z_t) = \frac{1}{z_t \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln z_t - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (8)$$

Entonces se tiene que las ecuaciones (7) y (8) son las distribuciones de probabilidad consistentes con el proceso estocástico para el PIB y para la tasa de crecimiento del PIB. El próximo paso será calcular el valor esperado de los flujos de caja del cupón utilizando las ecuaciones anteriores. El cálculo del valor esperado surge entonces del producto del pago por la función de densidad de la distribución de probabilidad correspondiente.

¹⁶ Ver Anexo B para una explicación de la distribución lognormal de $z_t = 1 + g_t$.

Valuación del modelo¹⁷

$$\begin{aligned}
 F_t &= F_t^L + F_t^g + c = \\
 &= \frac{a \cdot D_t \cdot u}{TCN_t} \cdot (P_t - PB_t) \cdot I(P_t - PB_t) + b (g_t - g_{bt}) I(g_t - g_{bt}) + c \quad (9) \\
 &= \frac{a \cdot D_t \cdot u}{TCN_t} \cdot (P_0 e^{x_t} - PB_t) \cdot I\left(x_t - \ln\left(\frac{PB_t}{P_0}\right)\right) + b (z_t - (1 + g_{bt})) I(z_t - (1 + g_{bt})) + c
 \end{aligned}$$

Las funciones $I(\cdot)$ indican en el primer caso que los pagos se harán si el crecimiento acumulado representado a través de la variable x_t es mayor a $\ln(PB_t/P_0)$, o lo que es lo mismo si el nivel de PB_t es mayor al PIB base del año t ¹⁸. La segunda variable indicativa señala que se harán pagos solo si el crecimiento real del año t es mayor que el crecimiento real del año base en t , o lo que es lo mismo si uno más la tasa de crecimiento es mayor a uno más la tasa de crecimiento base.

Dado lo anterior, la ecuación para el flujo esperado toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 E(F_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} F_t^L \exp\left[-\frac{(x_t - \theta)^2}{2\sigma^2 t}\right] dx + b \int_{-\infty}^{\infty} F_t^g \frac{1}{z_t \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln z_t - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] dz + c = \\
 &= \frac{a \cdot D_t \cdot u}{TCN} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{\ln(PB/P_0)}^{\infty} (P_0 \cdot e^{x_t} - PB) \exp\left[-\frac{(x_t - \theta)^2}{2\sigma^2 t}\right] dx + \\
 &+ b \int_{1+g_b}^{\infty} (z_t - (1 + g_{bt})) \frac{1}{z_t \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln z_t - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] dz + c = \\
 &= \frac{a \cdot D_t \cdot u}{TCN} \left[P_0 e^{\mu t} \cdot N(d_1) - PB \cdot N(d_2) \right] + b \left[e^{\mu} N(d_3) - (1 + g_{bt}) N(d_4) \right] + c \quad (10)
 \end{aligned}$$

donde
$$d_1 = \frac{\ln(P_0 / PB_t) + (\theta + \sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}.$$

$$d_3 = \frac{-\ln(1 + g_{bt}) + \theta + \sigma^2}{\sigma}, \quad d_4 = \frac{-\ln(1 + g_{bt}) + \theta}{\sigma}$$

Para el cálculo del valor presente neto del flujo de caja del cupón al momento t tenemos simplemente que aplicarle a la ecuación (10) el factor de descuento e^{-rt} . Por lo tanto el valor presente del flujo de caja del cupón del momento t es igual a:

¹⁷ Revisando "Paul Wilmott in Quantitative Finance" sobre la valuación de activos contingentes en niveles y en tasas de crecimiento, esta última es inusual, por lo que este análisis es un ejercicio original.

¹⁸ El PIB base del año t está dado en el modelo o sea es exógeno.

$$\begin{aligned}
VPN(F_t) = & e^{-rt} \frac{a \cdot D_t \cdot u}{TCN_t} \left[P_0 e^{\mu t} \cdot N(d_1) - PB_t \cdot N(d_2) \right] + \\
& + b e^{-rt} \left[e^{\mu t} N(d_3) - (1 + g_{bt}) N(d_4) \right] + e^{-rt} \cdot c
\end{aligned} \tag{11}$$

La primera parte de la ecuación (11) es igual a la ecuación de Black y Scholes en el caso de que $\mu = r$, para una opción call con un precio de ejercicio PB_t y con un precio actual de P_0 . El que la tasa del crecimiento esperado del PIB aparezca en esta ecuación en vez de la tasa libre de riesgo refleja el hecho de que el PIB es un bien no transable y que por lo tanto el valor esperado sea calculado en la medida real en vez de en la medida neutral al riesgo. La segunda parte de la ecuación (11) tiene cierta similitud con la primera parte debido a que surge del valor esperado de una variable log-normal, incluso el procedimiento base de cálculo es similar al que puede utilizarse para Black y Scholes.

Sumando todos los valores presentes de los flujos del cupón en cada momento del tiempo obtenemos el valor del cupón al momento cero. Por lo tanto el valor del cupón será:

$$VPN(\text{cupón}) = \sum_{t=1}^{n=30} VPN(F_t) \tag{12}$$

Por lo tanto con (12) procederemos a valuar el bono indexado para el caso uruguayo y también realizaremos análisis de sensibilidad haciendo variar los parámetros del modelo como la tasa de descuento y como la media y la volatilidad de la distribución de la tasa de crecimiento del PIB.

6. Análisis de sensibilidad del modelo

En esta sección se le dará un valor al cupón del bono usando el modelo de la sección anterior. Como puede apreciarse en ese modelo, el valor del cupón depende de varios parámetros, siendo muchos de ellos variables macroeconómicas que son difíciles de estimar para un período de treinta años para adelante. Tanto la tasa de crecimiento del PIB, como el tipo de cambio y la inflación, son variables difíciles de medir en el largo plazo, máxime si ocurren en el medio crisis financieras que alteran mucho el valor de las mismas. Por lo tanto, muchas veces los valores promedios del pasado para estas variables no son una buena estimación para el futuro¹⁹.

Por lo tanto, lo que se hará en esta sección es establecer distintos escenarios para estimar el valor del cupón para así poder comparar y para no quedarnos con una sola estimación.

Los parámetros con respecto a las que se establecerán los distintos escenarios es con respecto a la media del crecimiento del PIB (θ), la volatilidad del producto (σ) y la tasa de descuento que se utiliza para descontar los flujos de fondos (r). Las razones por las cuales se eligen las variables mencionadas es que estas determinan el valor analítico y el bono es muy sensible a ellas. Por otro lado, se supondrá que la evolución

¹⁹ A pesar de esto, se procedió a estimar una serie del crecimiento del PIB histórico, para poder estimar la base del PIB real, que sirvió como un piso como ya se describió para el pago de intereses.

de la inflación está dada al igual que la evolución del tipo de cambio, tomando en cuenta la correlación que hay entre las mismas a través del tipo de cambio real.

Los valores iniciales a partir de los cuales se realiza el análisis de sensibilidad son los siguientes:

- El PIB en el momento 0 es de 299,9 millones de pesos constantes de 1983. Asimismo se supone una tasa de crecimiento para el PIB base real de 4,40% para el año 2006, 3,29% para el 2007, 2,95% para el 2008, 2,84% para el 2009, 2,81% para el 2010, 2,80% para el 2011 y de 2,79% del 2012 en adelante. Cabe aclarar que todas estas proyecciones fueron realizadas con el modelo que se estimó econométricamente para el PIB histórico y que se describe en el anexo A.
- Se supone que se maneja un circulante de US\$ 1000 millones y que cada bono tiene un valor de US\$ 1. Asimismo y de acuerdo a este monto se supone que “a” es de un 1,0%²⁰.
- La tasa de inflación es de 6,7% para el 2006, 6% para el 2007, 5% para el 2008, 4% para el 2009 y un 3% del 2010 hasta el 2035.
- El tipo de cambio será de 24,4 pesos por dólar para finales del 2006, 24,6 para el 2007 y luego a partir del 2008 y hasta el 2035 crecerá a una razón del 2% anual.
- El valor que se designa para el parámetro “b” en este trabajo es de 1.
- Se supondrá por otro lado que el piso que se paga de intereses que es representado por el parámetro “c” es de un 2%.

En primer lugar se realiza el análisis de sensibilidad para la tasa de crecimiento del PIB y para la volatilidad de la tasa de crecimiento del PIB. Tomando la tasa de descuento como la tasa libre de riesgo representada a través de la tasa LIBOR a un año a julio del 2006 con un valor de 5,5% (5,4% en términos capitalizable continuamente), procedemos a realizar el análisis de sensibilidad que se presenta en la siguiente tabla²¹.

Valor total del cupón indexado para una tasa de descuento de 5,4% (sobre el valor del principal de U\$S 1)

Vol. /Tasa de crec.	1%	2%	2,5%	3%	3,5%	4%
1%	0,29	0,31	0,36	0,57	0,92	1,33
2%	0,33	0,38	0,47	0,68	1,00	1,39
3%	0,38	0,47	0,59	0,80	1,10	1,47
4%	0,45	0,58	0,72	0,94	1,22	1,58
5%	0,53	0,71	0,86	1,08	1,36	1,71
6%	0,63	0,83	1,00	1,22	1,50	1,84

²⁰ El parámetro “a” representa el porcentaje que se paga de intereses sobre la diferencia del PIB efectivo y el estimado base.

²¹ Las tasas representadas en la tabla son tasas de crecimiento reales simples que luego son transformadas en tasas compuestas continuas para realizar los cálculos.

El valor total del cupón se puede descomponer en el valor que paga el cupón por la diferencia en los niveles, en las tasas de crecimiento y por el piso del 2% anual. Este último aporta 0,29 centavos al valor esperado del cupón. Los aportes de los niveles y de la tasa de crecimiento para una tasa de descuento de 5,4% se presentan en las dos siguientes tablas:

Valor cupón por la diferencia en niveles del PIB con respecto al base para una tasa de descuento de 5,4% y con $a = 1\%$

Vol. /Tasa de crec.	1%	2%	2,5%	3%	3,5%	4%
1%	0,00	0,00	0,02	0,20	0,50	0,86
2%	0,00	0,01	0,07	0,25	0,53	0,87
3%	0,01	0,05	0,14	0,31	0,58	0,91
4%	0,02	0,10	0,21	0,39	0,64	0,96
5%	0,05	0,16	0,29	0,47	0,71	1,02
6%	0,08	0,23	0,37	0,55	0,80	1,10

Valor cupón por la diferencia en tasas de crecimiento del PIB con respecto a la base para una tasa de descuento de 5,4% y con $b = 1$

Vol. /Tasa de crec.	1%	2%	2,5%	3%	3,5%	4%
1%	0,00	0,02	0,05	0,08	0,13	0,19
2%	0,04	0,08	0,11	0,14	0,18	0,23
3%	0,09	0,13	0,16	0,20	0,24	0,28
4%	0,14	0,19	0,22	0,26	0,29	0,34
5%	0,20	0,25	0,28	0,32	0,35	0,39
6%	0,26	0,31	0,35	0,38	0,42	0,45

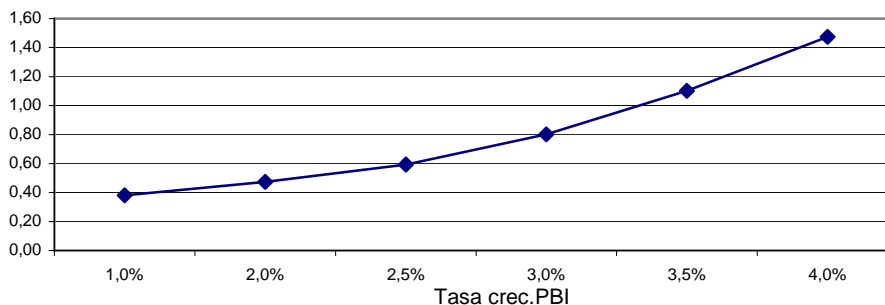
Como se puede observar para las tasas de crecimiento más bajas y con las volatilidades más altas, el pago por las diferencias en las tasas de crecimiento es más importante que el pago por la diferencia en niveles. En cambio cuando aumenta la tasa de crecimiento el pago por la diferencia en niveles se hace más importante.

Partiendo del escenario base que se representa por una tasa media de crecimiento del PIB de 3% del 2008 en adelante²² y una volatilidad del 3% se puede observar que para el escenario base el valor total del cupón es 0,80 dólares para un valor del principal de U\$S 1 al vencimiento, por lo que el precio del bono indexado estaría cotizando en niveles cercanos a la par al sumarse el pago del principal. Como se puede apreciar si dejamos en 3% el nivel de la volatilidad y hacemos variar la tasa de crecimiento del PIB, el mayor nivel de este parámetro eleva lógicamente el valor del cupón. Cabe observar la volatilidad en el precio del cupón, sin embargo esta es bastante menor que la que se presenta para el caso argentino, por lo tanto el actual diseño a pesar de que aún presenta volatilidad, esta es menor al hacer depender el pago del cupón de otros factores además del nivel del PIB.

²² En el análisis de sensibilidad las tasas de crecimiento son del 2008 en adelante ya que para el 2006 se supone un crecimiento de 7,5% y para el 2007 un 5%. Para la valuación se toma el valor medio de las tasas de crecimiento.

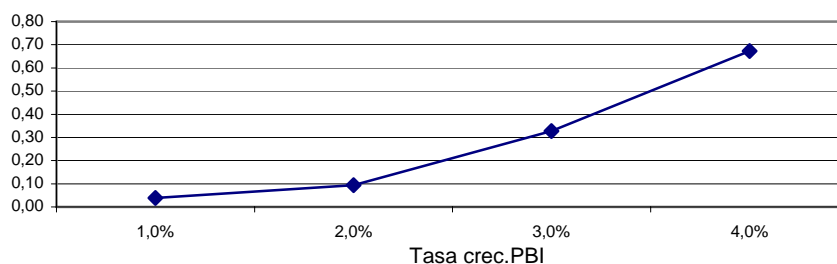
En la siguiente gráfica se puede observar la evolución del precio del cupón haciendo variar la tasa de crecimiento del PIB para una volatilidad del 3%.

Valor cupón en US\$ para diferentes tasas de crecimiento del PIB para una volatilidad dada del 3%



Para tener una idea de cómo aumenta el valor total del cupón con la tasa de crecimiento, se tomó la primera diferencia en el valor del mismo con respecto a la tasa de crecimiento que se representa en el siguiente gráfico.

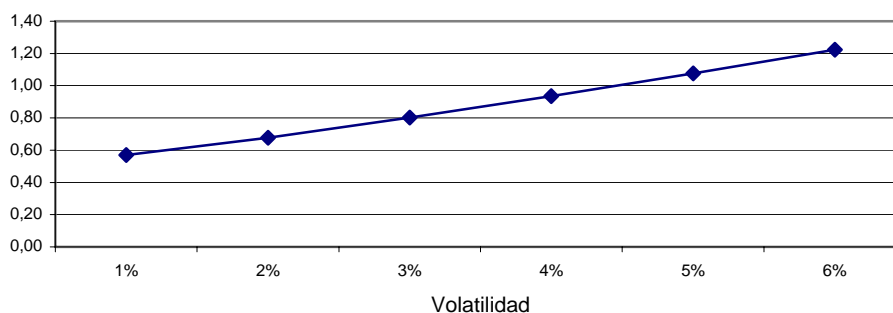
Primera diferencia del valor esperado del cupón al variar la tasa de crecimiento para una volatilidad dada del 3%



Como se puede observar el valor del cupón aumenta más que proporcionalmente con la tasa de crecimiento del PIB.

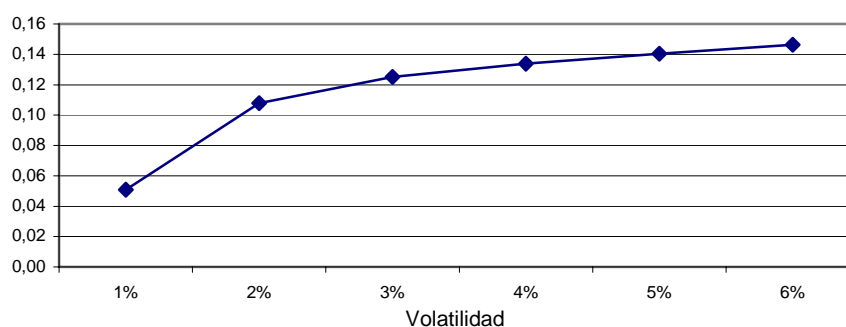
Si dejamos incambiada la tasa de crecimiento en 3% y hacemos variar la volatilidad de la tasa de crecimiento tenemos el resultado no tan sorprendente que a mayor volatilidad el precio del cupón es mayor, ya que con una misma media se da la posibilidad de valores más altos del PIB, lo que acrecienta el pago de intereses. Lo que si se puede observar es que la variación del precio del cupón es mucho mayor cuando se hace variar la tasa de crecimiento del PIB que cuando se hace variar la volatilidad del crecimiento. En el siguiente gráfico se puede observar dicha relación.

Valor del cupón en U\$S para diferentes tasas de volatilidad para una tasa de crecimiento dada del 3%



Tomando la primera diferencia en el valor del cupón con respecto a la volatilidad²³ se obtiene la siguiente representación gráfica:

Primera diferencia del valor esperado del cupón al variar la volatilidad para una tasa de crecimiento dada del 3%



Como se puede observar el aumento en el precio del cupón es menor al variar la volatilidad como se puede observar en el gráfico que al variar la tasa de crecimiento, lo que indica que el valor del cupón es más sensible con respecto a la tasa de crecimiento.

Si realizamos el cálculo sensibilizando con respecto a la tasa de crecimiento y la volatilidad pero con una mayor tasa de descuento se permite ver como bajarán los precios del cupón ante un aumento en la tasa de descuento. Este cálculo es importante ya que en primer lugar la tasa libre de riesgo ha venido aumentando en los últimos dos años luego de haber estado en niveles históricamente bajos. También es importante realizar este cálculo ya que se podría fundamentar que dada la volatilidad del bono este se tendría que descontar a una tasa mayor a la libre de riesgo a pesar de que como ya se mencionó la misma volatilidad ayuda a reducir la probabilidad de default. Por lo tanto en el siguiente cuadro se presenta la sensibilización para una tasa de descuento de 7,5%.

²³ A la derivada del valor de un activo con respecto a la volatilidad se le denomina Vega. La primera diferencia discreta representa una aproximación a esta medida.

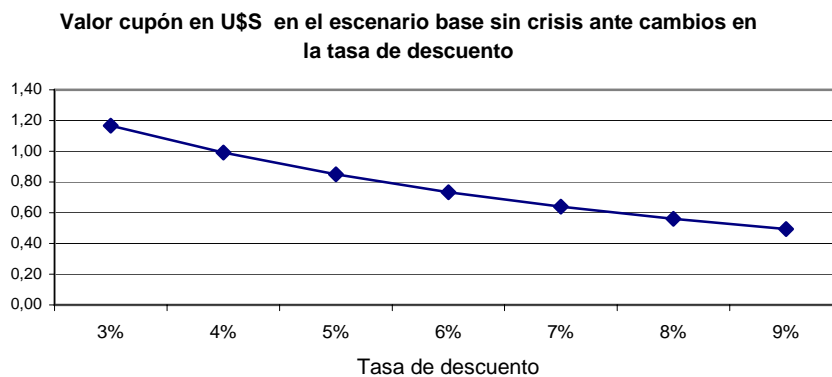
Valor del cupón indexado para una tasa de descuento de 7,5%

Vol. /Tasa de crec.	1%	2%	2,5%	3%	3,5%	4%
1%	0,23	0,25	0,28	0,42	0,66	0,94
2%	0,26	0,30	0,36	0,50	0,72	0,98
3%	0,30	0,37	0,46	0,60	0,80	1,05
4%	0,36	0,46	0,55	0,70	0,89	1,13
5%	0,42	0,55	0,65	0,80	0,99	1,22
6%	0,49	0,64	0,76	0,91	1,10	1,32

Como se puede observar para el caso de nuestro escenario base de un crecimiento del PIB de 3% y una volatilidad de 3%, el precio del cupón es de U\$S 0,60, lo que representa una reducción de 20 centavos de descontar con la tasa LIBOR de 5,4%.

Como es lógico los valores del cupón de la tabla son menores que lo que eran con una tasa de descuento menor. Lo interesante es ver en valor absoluto cómo varían estos precios. Vemos que para tasa de crecimiento no muy altas el valor del cupón no varía tanto como para tasas de crecimiento más altas. Es importante ver entonces que cuando se emita el bono con el correspondiente cupón, la tasa de descuento elegida hará variar considerablemente el precio del bono.

Para visualizar un poco mejor cómo varía el precio ante un cambio en la tasa de descuento se tomó el escenario base con un crecimiento del 3% y una volatilidad del 3%, y se hizo variar la tasa de descuento. El valor del cupón ante cambios en la tasa de descuento se observa en la siguiente gráfica.



Como se puede observar, la pendiente negativa ante un cambio en la tasa de descuento es más pronunciado que la pendiente positiva para la volatilidad y es parecida aunque de signo opuesto a la pendiente positiva del valor del cupón con respecto a la tasa de crecimiento, lo que señala la importancia de esta variable a los efectos de la valuación.

Por último y relacionado con la tasa de descuento, se procedió al cálculo de la duración y la convexidad del bono para el escenario base de una tasa de crecimiento y una volatilidad del 3 %, suponiendo que la tasa de descuento es de 5,4%. Estas medidas son importantes para tener una idea de la sensibilidad del bono ante cambios en la tasa de interés y por lo tanto para el manejo del riesgo tasa de interés.

La Macauley Duración para el bono en el escenario base con un plazo a 30 años es de 17,8 años y la Duración modificada es de 16,8. En tanto, la convexidad del bono en el escenario base es de 386,7. Por lo tanto un aumento en la tasa de un 1% disminuye el precio del bono en un 16,8% debido a la duración e incrementa en un 1,9% debido a la convexidad, por lo que el efecto neto es de una caída de 14,9%. Se desprende entonces que el precio del bono tiene una variación considerable con respecto a la tasa de interés.

7. Conclusiones

En este trabajo se diseñó un bono indexado al PIB de forma de que se diferenciara de las características de otros casos como el argentino en el que el bono indexado al PIB tenía pagos discontinuos con respecto a las condiciones que se le imponen. El caso que se presenta para Uruguay presenta pagos continuos del cupón en las condiciones que se le imponen.

Por otro lado, las condiciones que se imponen al bono indexado hacen más atractivo el bono indexado al PIB que para el caso argentino. En primer lugar, se realizan pagos tanto en función del nivel del PIB como de la tasa de crecimiento. En segundo lugar se establece un piso en el pago de los intereses representado a través del parámetro “c” que se estableció en un 2%, aunque este podría variar según el diseño al momento de emitirse el bono. En tercer lugar, no se establece un techo en el pago de intereses, lo que hace más atractivo el bono para los inversores y también hace más fácil su valuación. Por último, con los parámetros elegidos se tiene que en el escenario base el valor del cupón junto con el valor del principal se acerca a valores cercanos a la par, por lo que su precio se asemeja al precio de los bonos estándar, a pesar de que como ya vimos tiene una mayor volatilidad con respecto a las variables macro que determinan su precio.

Hay que señalar de que con la deuda en bonos indexados al PIB, esta adquiere un carácter contingente, ubicando al inversor en una posición más cercana a la inversión en acciones.

Luego del diseño del bono se procedió a valuarlo utilizando la metodología de Black y Scholes junto con métodos estadísticos estándar. Se valuó el flujo de caja del cupón separando en el flujo de caja que se produce por el pago de intereses por la diferencia en niveles del PIB, en el flujo de caja que se produce por la diferencia de la tasa de crecimiento del PIB con respecto a la tasa de crecimiento base y el flujo de caja que se produce por el piso en el pago de intereses.

Luego de la modelización matemática del modelo se procedió a realizar análisis de sensibilidad con respecto a la tasa de crecimiento del PIB, con respecto a la volatilidad del crecimiento económico y con respecto a la tasa de descuento. Se obtuvo como resultado que la variable a la que es más sensible el valor del bono es la tasa de crecimiento del PIB, seguida por la tasa de descuento. También se puede observar que los pagos son más importantes por la diferencia en niveles del PIB que por la diferencia en las tasas de crecimiento a medida que aumenta la tasa de crecimiento esperada. Si la tasa de crecimiento esperada creciera al mismo ritmo que la tasa de crecimiento del PIB base entonces los pagos se explicarían por la volatilidad del bono y serían más importantes los pagos del cupón explicados por la diferencia en la tasa de crecimiento con respecto a la base.

Además es importante resaltar que la volatilidad en el precio del cupón es mucho menor que el caso argentino, donde el valor del cupón es menor en centavos de dólar pero tiene una variación mucho mayor según los estudios que se han hecho²⁴. Esto ayudará probablemente a que los inversores se interesen mucho más en este tipo de bono.

Hasta ahora la inversión en el nuevo mercado de bonos indexados a una variable macro se ha producido por reestructuraciones de la deuda de los países con los acreedores o mediante organismos internacionales. La mejora en el diseño del bono junto con las mejores características de dichos bonos puede atraer a nuevos inversores y permitirían a los gobiernos cubrirse contra shocks adversos a las economías. Por lo que la deuda contingente a una variable macro como es el PIB permite realizar una cobertura para que solo se pague cuando la economía está funcionando relativamente bien y esto también beneficia a los inversores ya que se reduce la probabilidad de default, además de que se perciben pagos mayores que los bonos estándar cuando la economía está funcionando realmente bien.

Posibles estudios en el futuro podrían consistir en avanzar en el diseño del bono desde el punto de vista del inversor, realizando encuestas como ya se han hecho con respecto a los requisitos para invertir en dichos instrumentos.

8. Referencias

Bailey, Norman, "A Safety Net for Foreign Lending", 1983, Business week, January 10.

Borensztein, Eduardo R., y Paolo Mauro, "Reviving the Case for GDP-Indexed Bonds" (2002), IMF Policy Discussion Paper Nro.02/10.

Caballero, Ricardo J., "Coping with Chile's External Vulnerability: A Financial Problem", Enero 2002, Banco Central de Chile.

Daniel, James, "Hedging Government Oil Price Risk", 2001, IMF Working Paper Nro.01/185.

Eduardo Borensztein, Marcos Chamon, Olivier Jeanne, Paolo Mauro y Jeromin Zettlemeyer, "Sovereign Debt Structure for Crisis Prevention", 2004.

Eichengreen, Barry, Hausmann, Ricardo y Panizza, Ugo, "Currency Mismatches, Debt Intolerance and Original Sin: Why they are not the same and Why it matters", Working paper 10036, NBER, Octubre 2003.

Hull, John C., "Options, Futures and Other Derivatives", Third Edition, Prentice Hall.

Jensen, Michael and Meckling, William, "Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure", Journal of Financial Management, 1976.

Krugman, Paul, "Financing vs Forgiving a Debt Overhang", Journal of Development Economics, 1988, Vol.29.

²⁴ J. Okseniuk, Argentina: Valuación del Cupón Atado al PIB mediante un análisis probabilístico, Centro para la Estabilidad Financiera, mayo 2005.

Libanio, Gilberto, "Unit roots in macroeconomic time series: theory, implications and evidence", University of Notre Dame, Diciembre del 2005.

Mether, Max., "Simulation Analysis of Option Buying", Sovelletum Matematiikan erikoistyot, Febrero del 2004.

Myers, Stewart, "Determinants of Corporate Borrowing", Journal of Financial Economics, 1977.

Myers, Stewart, "The Capital Structure Puzzle", Journal of Finance, 1984.

Myers, Stewart and Majluf, Nicholas, "Corporate Financing and Investment Decisions When Firms Have Information That Investors Do Not Have", Journal of Financial Economics, 1984.

Nielsen, Lars Tyge, "Pricing and Hedging of Derivative Securities", Oxford University Press, 1999.

Obstfeld, Maurice, Peri, Giovanni, "Regional Nonadjustment and Fiscal Policy", 1988, in EMU: Prospects and Challenges for the Euro (Special Issue of Economic Policy), ed. by David Begg, Jurgen von Hagen, Charles Wyplosz and Klaus F. Zimmermann.

Okseniuk, J., Argentina: "Valuación del Cupón Atado al PIB mediante un análisis probabilístico", Centro para la Estabilidad Financiera, Mayo 2005.

Paul Wilmott, "Paul Wilmott in Quantitative Finance" Volumes 1,2, Wiley, 2001.

Pernice, S. y Lopez Fagundez, F., "Valuation of Debt Indexed to Real Values I The Case of the Argentinean Growth Coupon: a Simple Model", Centro de Estudios en Ingeniería Financiera, Universidad del CEMA, Marzo del 2005.

Ross, Stephen, "The Determination of Financial Structure: the Incentive-Signalling Approach", Bell Journal of Economics, 1977.

Shiller, Robert J., "Macro Markets: Creating Institutions for Managing Society's Largest Economic Risks" 1993, (Oxford, United Kingdom: Clarendon Press).

Springer Series in Statistics, "Modern Concept and Theorems of Mathematical Statistics", Springer-Verlag, Berlin, 1986.

Stulz, René M., "Options on the Minimum or the Maximum of two risky assets", Journal of Financial Economics 10 (1982) 161-185.

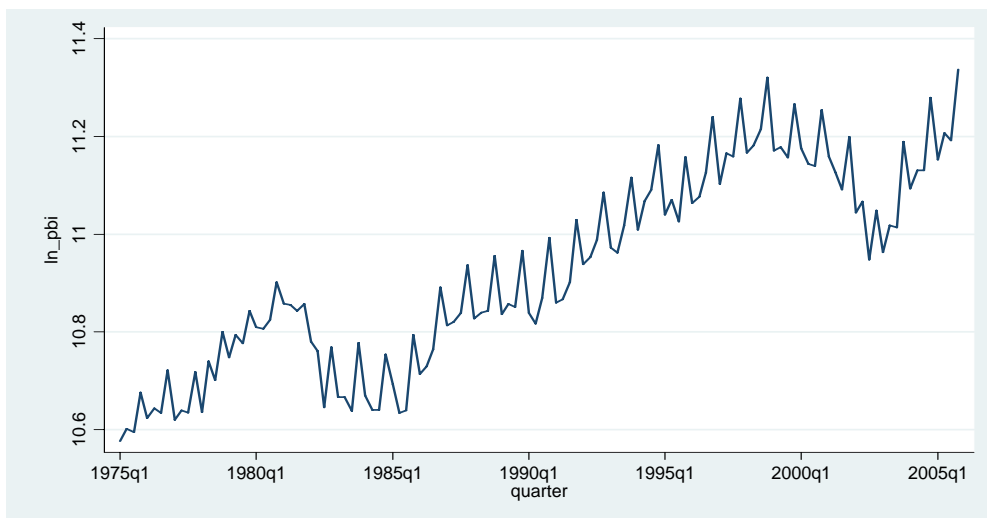
Varsavsky, Martín, y Braun, Miguel, "Cuánto interés tienen que pagar los bonos argentinos?", 2002, La Nación, 4 de Febrero.

Wikipedia, Log-normal distribution, http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution.

Anexo A

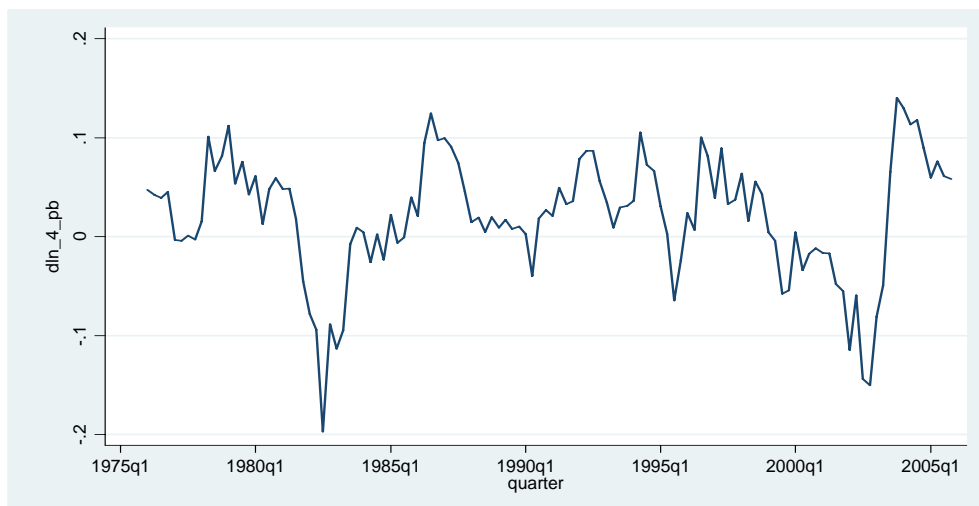
En este anexo se describe la proyección del PIB base a través de la estimación del PIB trimestral histórico desde el primer trimestre de 1975 hasta el último trimestre del año 2005. Una vez que se obtuvo la estimación del PIB histórico se procedió a predecir para adelante un PIB de referencia para el PIB base.

Para ello, en primer lugar se procedió a testear el orden de integración de la serie trimestral del PIB para lo cual previamente se le aplicaron logaritmos para suavizar la serie. Previamente al test se observó la gráfica de la serie logaritmo del PIB y se pudo constatar que la serie no era estacionaria. Con el test de Augmented Dickey Fuller (ADF) se procedió a testear las raíces unitarias y en todos los casos ya sea sin constante como con constante o con tendencia no se rechazó la hipótesis nula de poseer una raíz unitaria.



En la gráfica del logaritmo del PIB trimestral se puede observar no solo que la serie no es estacionaria sino que además hay un claro componente estacional en la serie del PIB como era de esperar. Es por eso que para que no nos afecte este componente estacional en la estimación tomamos las cuartas diferencias en el logaritmo del PIB, o sea el logaritmo del PIB trimestral de un período menos el logaritmo del PIB del mismo trimestre del año anterior.

Luego se procedió a testear el orden de integración de la cuarta diferencia del logaritmo del PIB trimestral, o sea de la tasa anual de crecimiento del PIB trimestral con respecto al mismo trimestre del año anterior. En los casos con o sin constante rechazamos la hipótesis nula de que hay una raíz unitaria en favor de la estacionariedad. Por otro lado si miramos la gráfica parece en principio que la serie es estacionaria en media.



Probamos también el ADF con tendencia y se rechaza al 5% y al 10%, y además el componente de tendencia no da significativo, así que se puede concluir que la cuarta diferencia del logaritmo del PIB trimestral para el período analizado es una serie estacionaria²⁵. A continuación se presentan las salidas en STATA para los tests de ADF.

```
. dfuller dln_4_pb, lags(4)
```

```
Augmented Dickey-Fuller test for unit root          Number of obs   =          115
```

Test Statistic	----- Interpolated Dickey-Fuller -----		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-3.691	-3.505	-2.889

```
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0042
```

```
. dfuller dln_4_pb, noconstant lags(4)
```

```
Augmented Dickey-Fuller test for unit root          Number of obs   =          115
```

Test Statistic	----- Interpolated Dickey-Fuller -----		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-3.343	-2.598	-1.950

```
. dfuller dln_4_pb, drift lags(4)
```

```
Augmented Dickey-Fuller test for unit root          Number of obs   =          115
```

Test Statistic	----- Z(t) has t-distribution -----		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-3.691	-2.361	-1.659

```
p-value for Z(t) = 0.0002
```

²⁵ Podemos concluir que el logaritmo del PIB es una serie integrada de orden uno. Estudios similares para Argentina y Brasil muestran también que los PIB de estos países son series integradas de orden uno. Ver Libanio, Gilberto "Units Roots in Macroeconomic Time Series: theory, implications and evidence".

```
. dfuller dln_4_pb, trend regress lags(4)
```

```
Augmented Dickey-Fuller test for unit root          Number of obs   =       115
```

Test Statistic	----- Interpolated Dickey-Fuller -----		
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-3.671	-4.035	-3.448

```
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0243
```

D.dln_4_pb	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
dln_4_pb						
L1.	-.2466057	.0671688	-3.67	0.000	-.3797458	-.1134655
LD.	.0269624	.0880958	0.31	0.760	-.1476588	.2015836
L2D.	.2614493	.0881324	2.97	0.004	.0867556	.436143
L3D.	.3186118	.0916921	3.47	0.001	.1368622	.5003615
L4D.	-.1974323	.0947452	-2.08	0.040	-.3852336	-.0096309
_trend	-5.81e-06	.0000958	-0.06	0.952	-.0001958	.0001842
_cons	.0055673	.0069131	0.81	0.422	-.0081356	.0192702

Luego de probar que la serie es estacionaria se procedió a estimar la serie de la tasa de crecimiento del PIB trimestral tomando en cuenta las crisis que existieron en el año 1982 y en el año 2002 que afectaron directamente al PIB, por lo cual se agregan dummies para esas fechas.

Se probaron varios modelos de series de tiempo, siendo que el que mejor ajustó a los datos es un AR(1) con intervenciones o dummies en los períodos de crisis económicas. La siguiente ecuación representa el modelo de la tasa de crecimiento del PIB trimestral donde $(1-L^4).lnPIB = y_t$, o sea que la tasa de crecimiento anual del PIB trimestral se representa a través de y_t . El modelo se representa entonces por:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 d_{1t} + \phi_3 d_{2t} + u_t \quad (13)$$

```
. arima dln_4_pb dummy1 dummy2, arima(1,0,0) robust
```

```
ARIMA regression
```

```
Sample: 5 to 124          Number of obs   =       120
                          Wald chi2(3)         =       251.28
Log pseudolikelihood = 237.8654          Prob > chi2         =       0.0000
```

dln_4_pb	Semi-robust		z	P> z	[95% Conf. Interval]	
	Coef.	Std. Err.				
dln_4_pb						
dummy1	-.1030664	.0223466	-4.61	0.000	-.146865	-.0592678
dummy2	-.0761643	.0223533	-3.41	0.001	-.1199759	-.0323526
_cons	.0275517	.0114308	2.41	0.016	.0051478	.0499556
ARMA						
ar						
L1.	.7468961	.0635056	11.76	0.000	.6224274	.8713648
/sigma	.0332217	.0024986	13.30	0.000	.0283246	.0381189

Como se puede ver la serie es estacionaria y estable en el largo plazo, siendo que ϕ_1 es menor que 1. Además todas las variables del modelo son significativas al 5% y el modelo es significativo a nivel general.

Se probaron con más rezagos en el componente autorregresivo y en el componente de medias móviles pero en todos los casos las variables no dieron significativas.

Como paso siguiente se procedió a predecir para el futuro la serie de la tasa de crecimiento anual del PIB trimestral, tomando en cuenta claro que esta predicción solo puede establecerse como una referencia y que esto es mejor que no poseer ninguna referencia para la tasa de crecimiento del PIB base.

Con la predicción de la tasa de crecimiento del PIB trimestral se calculó la tasa de crecimiento del PIB anual desde el 2006 en adelante. Los resultados de dicho cálculo se presentan a continuación empezando para el año 2006.

$$g_{bt} = [4,40\%, 3,29\%, 2,95\%, 2,84\%, 2,81\%, 2,80\%, 2,79\%, \dots]$$

Como se puede observar del 2012 en adelante la tasa de crecimiento es de 2,79%.

Luego de tener esta referencia de la tasa de crecimiento, a partir de un PIB base en el momento 0 (año 2005) de 299.932 en miles de pesos constantes de 1983, se procede a calcular el PIB base real para la tasa de crecimiento g_{bt} .

Anexo B

En primer lugar se demostrará que la distribución del logaritmo de la tasa del crecimiento del PIB sigue una distribución normal.

Según la metodología de Black y Scholes que se utilizó en el capítulo cinco para valorar el bono indexado y según la ecuación (5), el nivel del PIB es descrito por el siguiente proceso Browniano geométrico:

$$P_t = P_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma (W(t) - W(0))\right] \quad (14)$$

donde $P_0 > 0$, μ , $\sigma > 0$ son constantes y $W(0) = 0$ con probabilidad 1 por definición del proceso Browniano. También se describe usualmente el proceso como:

$$\ln P_t = \ln P_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t) \quad (15)$$

que es un proceso Browniano generalizado. La distribución de $\ln P_t$ es normal con media $\ln P_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$ y varianza $\sigma^2 t$.

Para el intervalo $[t, t + \tau]$ tenemos entonces que:

$$\ln P_{t+\tau} = \ln P_t + (\mu - \sigma^2) \tau + \sigma(W(t+\tau) - W(t)) \quad (16)$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del PIB capitalizable continuamente por unidad de tiempo en el intervalo $[t, t + \tau]$ es²⁶:

$$\frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{P(t+\tau)}{P(t)} \right) = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{\tau} \sigma(W(t+\tau) - W(t)) \quad (17)$$

Esta se distribuye $N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{\tau}\right)$

Por otro lado sabemos que $1 + g_t = \frac{P(t+1)}{P(t)}$, por lo tanto tomando $\tau = 1$, tenemos la distribución del logaritmo de la tasa de crecimiento anual del PIB.

Como sabemos entonces que $\ln(1 + g_t) \longrightarrow N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$, entonces también conocemos la distribución de $1 + g_t$ que es una distribución log-normal con la función de densidad que aparece en la ecuación (8)²⁷.

²⁶ Ver Lars Nielsen "Pricing and Hedging of Derivative Securities".

²⁷ La solución de la ecuación integrada para la distribución log normal se puede ver en: "Modern Concept and Theorems of Mathematical Statistics", Springer Series in Statistics.